In conclusione … l'*algebra*

Riassunto delle puntate precedenti – le origini

In margine ad alcune delle scorse lezioni abbiamo avuto modo di vedere brevemente riassunta, nel brano che segue, l'idea che è posta storicamente all'origine dell'*algebra*, nata come studio sistematico e generale di quelle che oggi chiamiamo *equazioni algebriche*, e, che in assenza di qualsivoglia simbolismo, Alkhuwarizmi, nella sua celebre opera, introduce come varie combinazioni di tre elementi eterogenei, strutturalmente accostabili alle radici triconsonatiche della maggior parte dei vocaboli della lingua araba:

I found that the numbers which are needed in the calculus (*ḥisāb*) of *al-jabr* and *al-muqābala*, are of three types*, namely: roots, *squares*, and the simple number, [I-17] which is not related either to a root or to a *square*.

Among these types, the root is everything which is multiplied by itself, from the unity [i.e. the one], to the numbers above it, and the fractions below it.

The *square* is what is obtained [H-3r] when the root is multiplied by itself.

The simple number is any uttered number that is not related either to a root or to a *square*.

Root = شَيْء (shay) = cosa
Square = مَال (mal) = capitale
Number = عَدَد (adad)

L'incognita indica una quantità indeterminata (nel valore e nella natura): la *cosa* non è un oggetto ignoto, bensì un'entità certamente esistente, ma che può essere qualsiasi: una sorta di assoluto onnicomprensivo, ma sommamente indefinito, come potrebbe essere Allah. Tuttavia il nome dato al quadrato rivela l'origine economico-giuridica dell'esigenza di introdurre procedure di calcolo generale, atte a risolvere, principalmente, problemi di divisione ereditaria, secondo le regole di ripartizione indicate nel Corano.

I have found that these three types – roots, *squares* and a number – combine with one another, and we have the three kinds of combination, which are: *squares* plus roots [B-62r] are equal to a number; *squares* plus a number are equal to roots; roots plus a number are equal to *squares*.[8]

quadrati uguali a radici	$ax^2 = bx$
quadrati uguali a numeri	$ax^2 = c$
radici uguali a numeri	$bx = c$
quadrati e radici uguali a numeri	$ax^2 + bx = c$
quadrati e numeri uguali a radici	$ax^2 + c = bx$
radici e numeri uguali a quadrati	$bx + c = ax^2$

La classificazione delle equazioni è astratta, a priori, e combinatoria (di ispirazione lessicografica). I primi tre tipi erano stati precedentemente considerati dall'autore come *semplici*, e sostanzialmente equivalenti, in quanto risolubili immediatamente con facili operazioni aritmetiche (divisione o estrazione di radice). I procedimenti indicati nel titolo, *completamento* (الْجَبْر) e *bilanciamento* (المقابله) sono coinvolti unicamente in presenza di tre termini.

Il *fil rouge* dell'algebra

Nell'elenco manca la versione che vede tutti e tre gli elementi collocati a primo membro, con un secondo membro pari a zero. Il motivo risiede nei tipi di problema di cui le equazioni proposte sono la formulazione matematica. Essi scaturiscono dalla necessità di esprimere una stessa quantità in due modi distinti: ciò avviene, ad esempio, nel caso di una questione elementare di suddivisione ereditaria, in cui a secondo membro compaia il valore dell'intero patrimonio disponibile, e a primo membro l'espressione corrispondente alla regola per la distribuzione fra gli aventi diritto. Del resto, questo principio verrà posto a fondamento della traduzione algebrica di condizioni geometriche anche da Cartesio, nel XVII secolo. Nella sua *Géométrie* (1637) leggiamo (vedi il file "Nota storica_13.pdf"):

In tal modo, volendo risolvere qualche problema, lo si deve dapprima considerare come già fatto, e bisogna dare dei nomi a tutte le linee che sembrano necessarie per costruirlo, sia a quelle che sono ignote sia alle altre. Poi, senza considerare alcuna differenza tra queste linee note e ignote, si deve percorrere la difficoltà secondo l'ordine che mostra nel modo più naturale possibile in quale maniera esse dipendano reciprocamente le une dalle altre, fino a che non si sarà trovato un mezzo per esprimere una stessa quantità in due forme, il che si chiama ***equazione****; infatti i termini di una delle due forme sono uguali a quelli dell'altra. E si devono trovare tante equazioni siffatte quante sono le linee che si sono supposte ignote.*

Questa idea sta alla base della *geometria analitica*, in cui l'oggetto che si suppone già costruito è, ad esempio, una curva, traiettoria di un punto il cui movimento sia soggetto a due tipi di vincoli determinati da un meccanismo (come lo scorrimento lungo un binario rettilineo che, a sua volta, ruoti intorno ad un'estremità fissata ad un perno). *Analitico* è precisamente, secondo l'etimo del termine, lo *scioglimento* dell'effetto finale, che viene ad essere presentato come risultato della composizione di più fattori concomitanti.

Le varie forme d'equazione proposte da Alkhuwarizmi avevano comunque continuato a dominare anche l'algebra dei secoli precedenti, indipendentemente da qualsivoglia interpretazione geometrica. Se ne trova una traccia evidente nell'indice dell'*Algebra* di Rafael Bombelli (1572), di cui riportiamo qui un estratto:

I tre elementi di Alkhuwarizmi sono qui chiamati, rispettivamente, *potenza*, *tanti* e *numero*. Alla *potenza* può sostituirsi il *cubo*: ad esempio, l'equazione $x^3 = 15x + 4$ (dai noi trattata in "Nota storica_1.pdf") corrisponde alla seguente voce:

Capitolo di cubo eguale a Tanti, e numero

Il tratto caratteristico, che rimane invariato nel tempo, è la centralità di un oggetto di studio di cui conta la *struttura*, intesa come combinazione articolata di parti di natura diversa (le tre *specie* di Alkhuwarizmi). Ed è su queste che opera, secondo regole generali, il metodo aritmetico i cui due pilastri sono citati nel titolo dell'opera fondatrice:

Abu Abd-Allah ibn Musa Al-Khuwarizmi (IX secolo d.C.)
Al-Kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr w'al-muqabalah

(Compendio di calcolo mediante completamento e bilanciamento)

Il nome dell'autore e il titolo dell'opera

Il nome *Al-Khuwarizmi* deriva dall'oasi di Chiva, luogo di origine dell'autore, mentre *ibn Musa* significa figlio di Mosè.
Il termine *al-jabr* significa *completamento* (o *ripristino*), ed indica l'eliminazione delle quantità negative da un'equazione. Per esempio, *al-jabr* trasforma $x = 10 - 3x$ in $4x = 10$. La parola *algebra* deriva proprio da *al-jabr,* e quest'opera è considerata il documento fondatore della disciplina. Il termine *al-muqabalah* significa *bilanciamento* (o *semplificazione*) ed indica l'atto di ridurre le quantità positive della stessa potenza su entrambi i membri dell'equazione.
Per esempio, *al-muqabalah* trasforma $10x + 64 = 5x + 36 + x^2$ in $5x + 28 = x^2$. Secondo altri l'espressione *al-jabr w'al-muqabalah* sarebbe formata dal termine assiro e dal termine arabo per *equazioni,* altri ancora fanno derivare entrambe le parole dal siriaco e interpretano *al-jabr* come *arte di uomo eccellente* e *w'al-muqabalah* come *libro delle scienze occulte.*

(brano tratto dall'ipertesto: M. Barile, A.M. Pastore, *Viaggio ideale e virtuale attraverso le pagine di scritti matematici,* http://galileo.dm.uniba.it/~barile/ipertesto.pdf)

Il seguente calcolo, contenuto nell'opera appena citata, è un efficace esempio di applicazione:

Si divida dieci in due parti, si moltiplichi ognuna con se stessa e si sommino i due prodotti. Il risultato è cinquantotto dirhams.

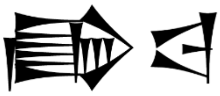
Il problema, attraverso i passaggi seguenti, viene ricondotto ad un'equazione del tipo *quadrati e numeri uguali a radici*.

$$x \to 10-x \to (10-x)^2 = 100 + x^2 - 20x \to 100 + x^2 - 20x + x \cdot x = 100 + 2x^2 - 20x = 58$$
$$\underset{(1)}{\to} 100 + 2x^2 = 58 + 20x \to 50 + x^2 = 29 + 10x \underset{(2)}{\to} 21 + x^2 = 10x.$$

Le operazioni (1) e (2) sono esempi di *completamento* e di *bilanciamento*, rispettivamente. Nel primo caso si ripristina la quantità mancante a primo membro (contrassegnata dal segno meno), nel secondo caso si elidono gli uni con gli altri gli elementi della stessa natura (i numeri con i numeri).

<u>Divagazione linguistica</u>

Il concetto di *completamento* (*al-jabr*) trae origine dalla pratica artigianale, come quella dei *conciaossa*, barbieri, che in epoca medievale, effettuavano anche interventi medici di riparazione delle fratture. Più interessante sotto il profilo culturale, in quanto ricchissima di sfumature semantiche ed implicazioni filosofiche, è la parola che abbiamo tradotto come *bilanciamento* (*al-muqabalah*). La sua radice triconsonantica è ق ب ل (da destra a sinistra si leggono le lettere *qaf, ba* e *la*, corrispondenti alle nostre Q, B, L). Il suo suono viene fatto risalire ad un termine della lingua sumera:

 **= petto**

GA BA
(latte) (dare)

L'idea di fondo è quella di uno *scambio*, comportante un contatto diretto tra due soggetti, e che, secondo alcuni studi sulle radici remote delle lingue arcaiche, verrebbe espresso dall'accostamento tra il fonema *g* (indicante l'*esternalizzazione*) e il fonema *b* (indicante l'*interiorizzazione*). Questa simultaneità/reciprocità di *dare* e *ricevere* è raffigurata, negli ideogrammi cuneiformi riportati qui sopra, per la prima parte, dall'organo dell'allattamento, e, per la seconda parte, dall'immagine della suddivisione (nella sua forma più elementare, il dimezzamento), intesa come distribuzione (del cibo, del salario, della terra, …). La stessa coppia di consonanti compare nelle parole tedesche *geben* (corrispondente all'inglese *give*) e *Gabel* (*forchetta*, un oggetto il cui profilo è un'alternanza di sporgenze e rientranze). Ritroviamo combinazioni fonetiche affini anche nella lingua egizia:

(abbracciare)

I primi tre geroglifici (a sinistra: una corda, una stuoia, una pagnotta) indicano, nell'ordine, i tre suoni consonantici scritti a fianco, mentre il carattere raffigurante due braccia ha funzione determinativa:

consente di individuare, tra tutte le parole (quasi) omofone, quella rientrante in uno specifico ambito di significato.
Nello stesso filone si inserisce anche la *cabala* ebraica, un insieme di dottrine mistiche tradizionali che sono così chiamate in quanto *ricevute* da Dio:

קבלה

Le quattro lettere qui riportate sono (da destra a sinistra): *qof, bet, lamed, he*, omologhe delle nostre Q, B, L, H.

Per tornare alla lingua araba, la radice ق ب ل accomuna tante parole dai significati riconducibili a concetti come *accettare, fronteggiare, corrispondere,* ... E il *bilanciamento* del procedimento di Alkhuwarizmi consiste in effetti nell'eliminazione, parallela e simultanea, di una stessa quantità numerica da entrambi i membri di un'equazione: una sorta di livellamento, volto ad eliminare un eccesso, ed eseguito mediante una sottrazione "paritetica".

<u>L'algebra "verbale"</u>

Come già avevamo notato, consultando alcune pagine del testo originale, Alkhuwarizmi non utilizza simboli di nessun genere, e gli stessi numeri sono scritti per esteso, chiamati con i loro nomi (vedi, ad esempio, ثلاثة, *thalatha,* la parola che indica il *tre*). Ciononostante, è forte la connotazione astratta della presentazione, che si propone di illustrare un metodo generale, di ampia applicabilità: come leggiamo nella premessa all'opera, l'autore ha in mente necessità pratiche, tra cui quelle relative ad *eredità, testamenti, ripartizioni e transazioni, [...] misurazione di terreni, scavo di canali, costruzioni e molte altre cose.* Ciò dimostra come la *forma della scrittura* non sia l'aspetto determinante ai fini della *generalità* e *versatilità* della sostanza trattata. Determinante è invece la *forma del pensiero* soggiacente: un pensiero incentrato sulla struttura, intesa come sistema di relazioni tra le parti, un impianto di caselle vuote (immaginate come tali, benché non rappresentate graficamente da incognite) che possono essere occupate da diversi oggetti concreti. Tra i possibili inserimenti (che sono particolari forme di *sostituzioni* nella visione di Richard Dedekind) figurano anche quelli di enti geometrici, a cui lo stesso Alkhuwarizmi fa ricorso, nell'opera, al fine di visualizzare le relazioni precedentemente espresse in termini algebrici:

Sullo sfondo rimane sempre e comunque una sorta di schema di mosaico: una griglia predefinita, che riproduce i tratti essenziali di una certa situazione, e che assume un'identità specifica (vedi: un particolare numero, anziché una quantità imprecisata) nel momento in cui viene opportunamente riempita. Mentre è immediata l'associazione con la formazione delle parole arabe a partire dalle radici triconsonantiche (si veda, nel file "La radice araba", l'esempio di ك ت ب, da cui scaturiscono innumerevoli termini relativi alla scrittura), non va dimenticata la componente più propriamente aritmetica del discorso. In questo rientra infatti a pieno titolo il sistema di numerazione *posizionale* (in base dieci), di origine indiana, e a cui lo stesso Alkhuwarizmi dedica ampio spazio. La sua monografia sull'argomento, di cui è andata perduta la fonte originale, ci è pervenuta tramite una traduzione latina, che porta il titolo *Algoritmi de numero indorum*. La prima parola è derivata dal nome del matematico arabo, come anche il termine spagnolo *guarismo*, con cui vengono talvolta designate le cifre decimali. Nel brano che riportiamo qui sotto, tratto dall'edizione del 1857 a cura di Baldassarre Boncompagni, esse vengono chiamate *literae.* Il loro numero è indicato come nove (*IX*), più avanti, nella descrizione del procedimento per la realizzazione della rappresentazione in base decimale, verrà introdotto lo *zero*.

> Dixit algoritmi: Cum uidissem yndos constituisse .ix. literas in uniuerso numero suo, propter dispositionem suam quam posuerunt, uolui patefacere de opere quod fit per eas aliquid quod esset leuius discentibus, si deus uoluerit.

Il metodo viene presentato come fonte di semplificazione, anche sotto il profilo didattico. Viene esplicitamente descritto il procedimento ricorsivo, consistente in raggruppamenti successivi delle unità (fino a nove) delle decine (fino a novanta), delle centinaia, e così via: quello che noi oggi chiameremmo, per l'appunto, un *algoritmo*.

> Inueni,inquid algorizmi, omne quod potest dici ex numero, et esse quicquid excedit unum usque in .ix., idest quod est inter .ix. et unum, idest duplicatur unum et fiunt duo; et triplicatur idem unum, fiuntque tria, et sic in ceteris usque in .ix. De inde ponuntur .x. in loco unius, et duplicantur .x. ac triplicantur, quemadmodum factum est de uno, fiuntque ex corum duplicatione .xx., ex triplicatione .xxx., et ita usque ad .xc. Post hec redeunt .c. in loco unius , [...]

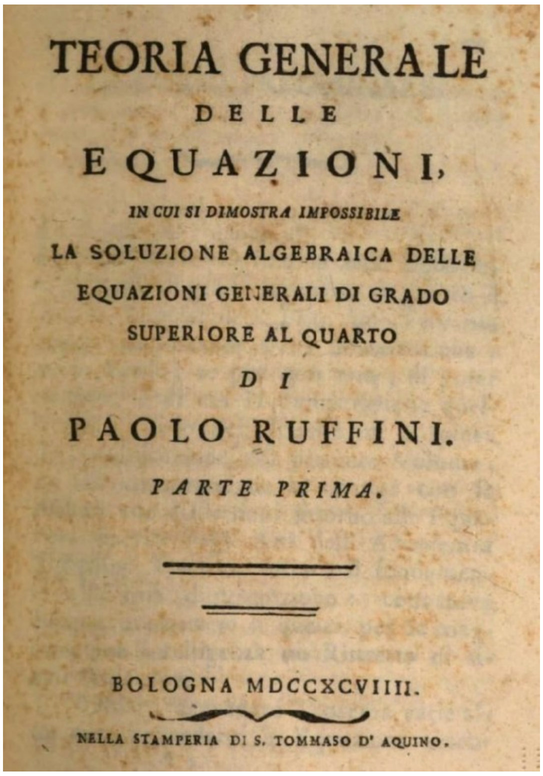
All'aspetto operativo si affiancano considerazioni ontologiche sulla natura del *numero*, in cui riecheggia la visione euclidea dell'unità come entità a parte, una *radice* da cui scaturisce l'*universo* dei numeri:

> Et iam patefeci in libro algebre et almucabalah, idest restaurationis et oppositionis, quod uniuersus numerus sit compositus, et quod uniuersus numerus componatur super unum. Vnum ergo inuenitur in uniuerso numero ; et hoc est quod in alio libro arithmetice dicitur. Quia unum est radix uniuersi numeri, et est extra numerum.

Interessante è, in questa citazione, la traduzione di *almucabalah*, che qui viene resa con il termine latino di *oppositio*.

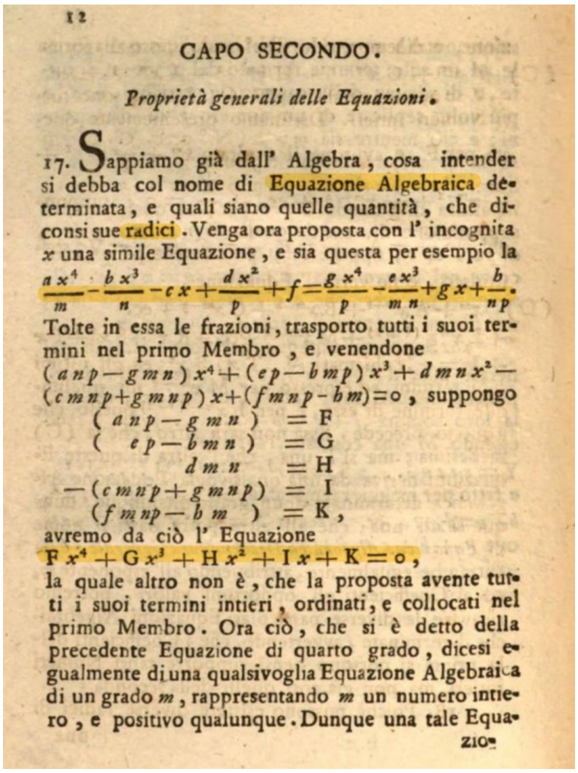
<u>Uno sguardo a Ruffini</u>

Alla fine dell'Ottocento, come dimostrano gli scritti del matematico italiano Paolo Ruffini (vedi "Nota storica_12.pdf") il *polinomio*, posto uguale a zero, è ormai diventato il perno dello studio delle equazioni. Tale impostazione, che traduce il problema della risoluzione delle equazioni algebriche nella ricerca dei punti di annullamento di una funzione, è naturalmente indispensabile alla formulazione del famoso teorema che lega le radici di un polinomio a suoi particolari divisori lineari.



TEORIA GENERALE
DELLE
EQUAZIONI,
IN CUI SI DIMOSTRA IMPOSSIBILE
LA SOLUZIONE ALGEBRAICA DELLE
EQUAZIONI GENERALI DI GRADO
SUPERIORE AL QUARTO
DI
PAOLO RUFFINI.
PARTE PRIMA.

BOLOGNA MDCCXCVIIII.
NELLA STAMPERIA DI S. TOMMASO D' AQUINO.



12

CAPO SECONDO.

Proprietà generali delle Equazioni.

17. Sappiamo già dall' Algebra, cosa intender si debba col nome di Equazione Algebraica determinata, e quali siano quelle quantità, che diconsi sue radici. Venga ora proposta con l' incognita x una simile Equazione, e sia questa per esempio la
$$\frac{ax^4}{m}-\frac{bx^3}{n}-cx+\frac{dx^2}{p}+f=\frac{gx^4}{p}-\frac{ex^3}{mn}+gx+\frac{b}{np}.$$
Tolte in essa le frazioni, trasporto tutti i suoi termini nel primo Membro, e venendone
$(anp-gmn)x^4+(ep-bmp)x^3+dmnx^2-(cmnp+gmnp)x+(fmnp-bm)=0$, suppongo
$$\begin{aligned}(anp-gmn) &= F\\ (ep-bmn) &= G\\ dmn &= H\\ -(cmnp+gmnp) &= I\\ (fmnp-bm) &= K,\end{aligned}$$
avremo da ciò l' Equazione
$Fx^4+Gx^3+Hx^2+Ix+K=0$,
la quale altro non è, che la proposta avente tutti i suoi termini intieri, ordinati, e collocati nel primo Membro. Ora ciò, che si è detto della precedente Equazione di quarto grado, dicesi egualmente di una qualsivoglia Equazione Algebraica di un grado m, rappresentando m un numero intiero, e positivo qualunque. Dunque una tale Equa-
zio-

Il percorso continua, si evolvono le tecniche di calcolo e si sviluppano le teorie intorno alle strutture, muta radicalmente il linguaggio, ma l'oggetto di studio, in fondo, rimane lo stesso.